

ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

$$M^{[T]}/M/1/\infty$$

Ισχύει ότι $g_i = P(x=i) = \begin{cases} 1 & i=T \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Στο σύστημα αυτό σε κάθε άφιξη έρχονται T πελάτες

(*) Είναι τότε $G(x) = x^T$ (κάθε άφιξη φέρνει T -πελάτες)
 $G'(x) = T x^{T-1}$ $\leadsto$ μου θυμίζει T -φάσεις
($M/Er/1/\infty$ όπου κάθε άφιξη έφέρνε T -φάσεις)

$$G'(1) = T$$

Επομένως $P(x) = \frac{\mu(1-x)(1 - \frac{\lambda T}{\mu})}{\mu(1-x) - \lambda x(1-x^T)}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Προσοχή!

Το σύστημα $M^{[T]}/M/1/\infty$ και $M/Er/1/\infty$ είναι εντελώς όμοια με τη διαφορά ότι τα $P_k(t) = P(J(t)=k)$ του

$M^{[T]}/M/1/\infty$ αντιστοιχούν στα $q_k(t) = P(m(t)=k)_{/m(0)=0}$ του $M/Er/1/\infty$

Το τελευταίο εφηγείται καθώς "φάσεις" $\longleftrightarrow$ αφίξεις T πελατών

Θυμήσου Erlang είναι: $\Gamma(\tau, \frac{1}{\tau\mu}) \equiv \sum_{i=1}^{\tau} e^{-\tau\mu} (\tau\mu)^i$

Η μόνη διαφορά είναι ότι οι πελάτες-φάσεις εξυπηρετούνται με $e^{-\tau\mu} (\tau\mu)^i$. Άρα η γεννήτρια των φάσεων είναι:

(πιάω στην $P(x)$ και βάλω όπου $\mu \rightarrow \tau\mu$)

Ειδική περίπτωση $g_i = P(x=i)$
 $P(x=T) = 1$ ενώ $P(x=i) = 0 \quad i \neq T$

$$G(x) = x^T (*)$$

Αρα:

$$Q(x) = \frac{\tau\mu(1-x)(1-\frac{\lambda\tau}{\tau\mu})}{\tau\mu(1-x)-\lambda x(1-x^{\tau})} \quad \frac{\lambda}{\mu} = \rho \quad \frac{\tau\mu(1-x)(1-\rho)}{\tau\mu-\tau\mu x-\lambda x+\lambda x^{\tau+1}}$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{\tau\mu(1-\rho)(1-x)}{\lambda x^{\tau+1} - (\lambda + \tau\mu)x + \tau\mu}$$

σχέση για "φοίσεις" στο Erlang.

Τροποποιημένο M/M^(τ)/1/∞

• Εστω ότι στην τηλε-εξέταση εφαρμόζω το M/M^(τ)/1/∞. Τι σημαίνει? τ=4
Αφίξεις Poisson (λ), 1 εξυπηρετ, απείρο χείρο αναμ.

Το σύστημα M/M^(τ)/1/∞ έχει την μη ρεαλιστική εικόνα ότι Εξυπηρετ
αν στην ουρά βρίσκονται λιγότεροι από τ πελάτες ο δίνονται
υπάλληλος να μην μπορεί να αρχίσει να εξυπηρετεί ανά τετράδα
ακόμη κι αν είναι ελεύθερος και χρόνος
(Εξυπ. Εκθ(μ))

Γ' αυτό το λόγο κάνουμε την εξής

Τροποποίηση: όταν ο υπάλληλος ελευθερώνεται και στο σύστημα

υπάρχουν λιγότεροι από τ πελάτες τότε αρχίζει αμέσως
να τους εξυπηρετεί ομαδικά (δηλ όλους μαζί)

Τι ισχύει σε κατάσταση στικής ισορροπίας; Εύρεση πιθανοτήτων σε ΚΣΙ

από 0 πάει στο 1
από 1 με εξυπηρέτηση ή 2 ή τ ή ∞

$$\lambda p_0 = \mu p_1 + \mu p_2 + \dots + \mu p_{\tau}$$

(ΠΟΣ ΒΓΑΙΝΕΙ / ΠΟΣ ΜΠΑΙΝΕΙ
από 0 → 1 1 → 0 ή 2 → 0 ή ...
Εως τ → 0

$$\lambda p_1 + \mu p_1 = \mu p_{\tau+1} + \lambda p_0$$

1 → 2
ή
1 → 0

↪ έχει τ+1 πελάτες εξυπηρετεί τ και πάει στο 1
ή 0 και έρχεται αφίξη 0 → 1

Δεν μπορεί πχ 2 → 1 γιατί?

Κάθε φορά έρχεται 1
λόγω του Μ

αν 2 < τ εξυπηρετεί ομαδικά

$$\lambda p_2 + \mu p_2 = \mu p_{\tau+2} + \lambda p_1$$

$$\lambda p_n + \mu p_n = \mu p_{\tau+n} + \lambda p_{n-1}$$

Ορίζουμε:
Γεννήτρια συνλόν

$$P(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i x^i, \quad |x| < 1$$

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} x^0 & \lambda p_0 = \mu p_1 + \mu p_2 + \dots + \mu p_c \\ x^1 & \lambda p_1 + \mu p_1 = \mu p_{c+1} + \lambda p_0 \\ x^2 & \lambda p_2 + \mu p_2 = \mu p_{c+2} + \lambda p_1 \\ & \vdots \\ x^n & \lambda p_n + \mu p_n = \mu p_{c+n} + \lambda p_{n-1} \end{aligned} \right\} \text{αθροίσω} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & \lambda (x^0 p_0 + x^1 p_1 + \dots) = \lambda \cdot P(x) \\ & \mu (x^0 p_0 + x^1 p_1 + \dots) = \mu (P(x) - p_0) \end{aligned} \right\} \text{1}^\circ \text{ μέλος}$$

$$\left. \begin{aligned} & \mu \cdot \sum_{i=1}^{\infty} p_i + \mu (x^1 p_{c+1} + \dots) + \lambda (x^1 p_0 + x^2 p_1 + \dots) \end{aligned} \right\} \text{2}^\circ \text{ μέλος}$$

$$\lambda P(x) + \mu (P(x) - p_0) = \mu \sum_{i=1}^{\infty} p_i + \frac{\mu}{x^c} [x^{c+1} p_{c+1} + x^{c+2} p_{c+2} + \dots] + \lambda x [p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots]$$

$$\Rightarrow \lambda P(x) + \mu [P(x) - p_0] = \mu \sum_{i=1}^{\infty} p_i + \frac{\mu}{x^c} [P(x) - \sum_{i=0}^c x^i p_i] + \lambda x P(x)$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{\mu p_0 + \mu \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \frac{\mu}{x^c} \sum_{i=0}^c x^i p_i}{(\lambda + \mu) - \frac{\mu}{x^c} - \lambda x}$$

$$\Rightarrow P(x) = \frac{\mu \sum_{i=0}^{\infty} x^i p_i - \mu x^c \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \mu x^c p_0}{\lambda x^{c+1} - (\lambda + \mu) x^c + \mu}$$

όπου
 $P(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i, \quad |x| < 1$

Είναι όμως:

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{i=0}^{\infty} x^i p_i - \mu x^c \sum_{i=1}^{\infty} p_i - \mu x^c p_0 + \mu x^c p_c \\ &= \mu \sum_{i=0}^{c-1} x^i p_i + \mu x^c p_c - \mu x^c \sum_{i=1}^{c-1} p_i - \mu x^c p_c - \mu x^c p_0 \\ &= \mu \sum_{i=0}^{c-1} x^i p_i - \mu x^c \left[p_0 + \sum_{i=1}^{c-1} p_i \right] \\ &= \mu \sum_{i=0}^{c-1} x^i p_i - \mu x^c \sum_{i=0}^{c-1} p_i \\ &= \mu \sum_{i=0}^{c-1} p_i (x^i - x^c) \end{aligned}$$

Άρα
$$P(x) = \frac{\mu \sum_{i=0}^{z-1} P_i(x^i - x^z)}{\lambda x^{z+1} - (\lambda + \mu)x^z + \mu}$$

$$\Leftrightarrow P(x) = \frac{\sum_{i=0}^{z-1} P_i(x^i - x^z)}{\frac{\lambda}{\mu} x^{z+1} - \frac{\lambda + \mu}{\mu} x^z + 1}$$

Εδώ η πυκνότητα κυκλοφορίας είναι: $\rho = \frac{\lambda}{\tau \mu}$ άρα $\frac{\lambda}{\mu} = \tau \rho$

και
$$P(x) = \frac{\sum_{i=0}^{z-1} P_i(x^i - x^z)}{\tau \rho x^{z+1} - (\tau \rho + 1)x^z + 1} \quad (1)^{\text{ov}}$$

Αποδεικνύεται (το πως εκτός ύλης)

$\tau \rho x^{z+1} - (\tau \rho + 1)x^z + 1$ έχει $z+1$ το πλήθος ρίζες από τις οποίες:

i) Μία είναι ίση με τη μονάδα

ii) Ακριβώς $z-1$ βρίσκονται στο $|x| < 1$

iii) Μία, έστω η x_0 , είναι $|x_0| > 1$

Τότε ισχύει ότι: (2)^{ov} παρανοστής της μιας ρίζας 1, $z-1$ ρίζες στο $|x| < 1$ x_0 έστω $|x_0| > 1$

$$\frac{\tau \rho x^{z+1} - (\tau \rho + 1)x^z + 1}{(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})} = \frac{N \left(\sum_{i=0}^{z-1} P_i(x^i - x^z) \right)}{1-x} \quad \text{όπου } N \text{ σταθερά}$$

Εύρεση του N : Παρανοστής = $N \times$ αριθμητής $(1 - \frac{x}{x_0}) \Rightarrow P(x) = N \times (1 - \frac{x}{x_0})$
 Έχω $P(x) = N \times (1 - \frac{x}{x_0})$ όπως $P(1) = 1$ και επομένως

$$N = \frac{1}{1 - 1/x_0}$$

$$\frac{x}{x_0} < \frac{1}{x_0} < 1$$

Άρα
$$P(x) = \frac{1 - \frac{1}{x_0}}{1 - \frac{x}{x_0}} \Rightarrow P(x) = (1 - \frac{1}{x_0}) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0} \right)^k$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n (1-z)^{-1}, z < 1$$

$$P_k = (1 - \frac{1}{x_0}) \left(\frac{1}{x_0} \right)^k, k=0,1,\dots$$

$$= (1 - 1/x_0) x_0^{-k}$$

ακολουθεί ένα είδος γεωμετρικής κατανομής.

ΜΗ ΜΑΡΚΟΒΙΑΝΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΥΠΗΡΕΤΗΣΗΣ

M/G/1/∞

Θεωρούμε ένα σύστημα εξυπηρέτησης με έναν υπάλληλο και απεριόριστο χώρο. Οι πελάτες καταφθάνουν στο σύστημα με την κατανομή Poisson και οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν μια γενική κατανομή με α.σ.κ $B(t)$ και σ.π.η $b(t)$.

Όταν οι χρόνοι εξυπηρέτησης ακολουθούν γενική κατανομή τότε η τιμή $f(t)$: αριθμός πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t
 $\{f(t): 0 \leq t < \infty\}$ σ.διασ. σε συνεχή χρόνο με διακριτό χώρο. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$
δεν φτάνει πλέον για να μας καθορίσει τις μελλοντικές καταστάσεις και θα πρέπει να γνωρίσουμε επιπλέον τον χρόνο, έστω $x(t)$, που έχει διανύσει στην εξυπηρέτηση ο πελάτης που εξυπηρετείτε.

Μια λύση λοιπόν θα ήταν να θεωρηθεί η διδιοστάτη
 $\{x(t), f(t): 0 \leq t < \infty\}$

Η μέθοδος αυτή λέγεται μέθοδος της βοηθητικής μεταβ. όμως η διδασκαλία της γρήγορα

Εμείς θα ακολουθήσουμε την μέθοδο της υπεισερχομένης
Μαρκοβιακής αλυσίδας ΟΥΣΙΑ. Θα κοπάζω το σύστημα σε χρονικές στιγμές αναχώρησης πελατών.

Έστω $t_1 < t_2 < \dots$ οι διαδοχικές στιγμές κατά τις οποίες τελειώνει η εξυπηρέτηση του 1ου, 2ου ... πελάτη.
Οι στιγμές αυτές είναι διακλινές και διακριτές. (Διακριτός χρόνος με διακριτό χώρο καταστ. $S = \{0, 1, 2, \dots\}$)

Έστω $f_n = f(t_n)$ $n=1, 2, \dots$ όπου f_n είναι ο αριθμός των πελατών στο σύστημα αμέσως μετά το τέλος της n -οστής εξυπηρέτησης (δηλ. μετά την αναχώρηση του n -οστού πελάτη)

Ο 1ος πελάτης αναχωρεί την t_1 , ο 2ος την t_2 κλπ.

Τότε η οικογένεια των z_n $\{z_n: n=1, 2, \dots\}$ είναι μια

στωχική διαδικασία σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο
κατιśσεων $S = \{0, 1, 2, \dots\}$

Οι αλλαγές των κατιśσεων διέπονται από τον εξής κανόνα:

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n - 1 + A_{n+1} & z_n \geq 1 \\ A_{n+1} & z_n = 0 \end{cases}$$

αριθμός πελατών
αφίςως μετά
την $n+1$ εξυπηρ.

↳ όσοι έρχονται κατά τη
διάρκεια $(n+1)$ εξυπηρέτησης

Εξήγηση

Όταν ο n -οσος πελάτης φεύγοντας αφήνει $z_n \geq 1$ τότε

ο $(n+1)$ -οσος φεύγοντας θα αφήσει όσους αφήσε

ο n -οσος -1 (γιατί φεύγει ο ίδιος) + όσους ήρθαν κατά
τη διάρκεια $(n+1)$ εξυπηρέτησης

Από την άλλη μεριά, όταν ο n -οσος φεύγοντας αφήνει το

σύστημα αδειο, ο επόμενος που έρχεται πάει κατευθείαν
στην εξυπηρέτηση και φεύγοντας αφήνει πίσω του

όσους ήρθαν κατά τη διάρκεια της εξυπηρέτησής του.

Για την στωχική διαδικασία σε διακριτό χρόνο με διακριτό χώρο
όλα τα προηγούμενα μας άδηχουν στο συμπέρασμα ότι η

Μαρκοβιανή ιδιότητα ικανοποιείται.